APELLIDOS: NOMBRE:

ÁLGEBRA LINEAL - 1S1M-B (14/10/2011)

Parcial IA, Puntuación 25 %

1. (1 punto) Estudiar si $\left\{ \begin{pmatrix} a-1 \\ a+b \\ a-b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Solución No es subespacio vectorial porque el vector nulo no pertenece al conjunto.

2. (2 puntos) Obtener una base del subespacio vectorial

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{rl} x + 2y + 3z + 5t = & 0 \\ 2x + 4y + 8z + 12t = & 0 \\ 3x + 6y + 7z + 13t = & 0 \end{array} \right\}.$$

Solución En primer lugar, se resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéneo mediante el método de Gauss-Jordan para determinar unas ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial:

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + 2y + 3z + 5t = & 0 \\ 2x + 4y + 8z + 12t = & 0 \\ 3x + 6y + 7z + 13t = & 0 \end{array} \right. \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & | & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & | & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 13 & | & 0 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \underset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \underset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

donde

(1) $F_2 \to F_2 - 2F_1, F_3 \to F_3 - 3F_1$,

(2) $F_3 \to F_3 + F_2$,

(3) $F_2 \to \frac{1}{2}F_2$,

(4) $F_1 \to F_1 - 3F_2$.

El sistema inicial es equivalente al siguiente sistema, que puede resolverse mediante sustitución regresiva:

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + 2y + 2t = & 0 \\ z + t = & 0 \end{array} \right. \underset{\substack{y=\lambda \\ t=\mu}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{rl} x = & -2\lambda - 2\mu \\ y = & \lambda \\ z = & -\mu \\ t = & \mu \end{array} \right. \quad , \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in S \Longleftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el siguiente conjunto de vectores, $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, es un sistema de generadores de S. Además, son vectores linealmente independientes por no ser proporcionales. En consecuencia, dicho conjunto es una base de S.

3. (2 puntos) Sean $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bases de $\mathbb{R}^4$.

3.1 Calcular la matriz de cambio de base, de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$.

3.2 Obtener $\bar{x}_{\mathcal{B}_2}$, vector de coordenadas de $\bar{x}$ respecto de la base $\mathcal{B}_2$, sabiendo que el vector de coordenadas de $\bar{x}$ respecto de la base $\mathcal{B}_1$ es $\bar{x}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución

3.1 Las columnas de la matriz $\mathcal{C}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ de cambio de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$, son las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}_1$ respecto de $\mathcal{B}_2$. La resolución de los cuatro sistemas de ecuaciones lineales que determinan dichas coordenadas se puede realizar conjuntamente de la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{(2)}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

donde

(1) $F_2 \to F_2 - F_1, F_3 \to F_3 - F_1, F_4 \to F_4 - F_1$,

(2) $F_3 \to F_3 - F_2, F_4 \to F_4 - F_2$,

(3) $F_4 \to F_4 - F_3$.

Por tanto, se tiene $\mathcal{C}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.2 Si $P = \mathcal{C}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, entonces se verifica $\bar{x}_{\mathcal{B}_2} = P\bar{x}_{\mathcal{B}_1}$.

Por consiguiente, $\bar{x}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

4 (3 puntos) Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$,

$$S_1 = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu \\ -\lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\},$$

se pide:

4.1 Hallar una base y unas ecuaciones implícitas de S_1.

4.2 Hallar una base y la dimensión de S_2.

4.3 Hallar una base y la dimensión de $S_1 + S_2$.

4.4 Analizar si $S_1 + S_2$ es suma directa y si S_1 y S_2 son subespacios complementarios.

Solución

4.1 Para hallar una base de S_1 se analiza el rango de la matriz A cuyas columnas son los vectores generadores de S_1. Con este fin, se realizan operaciones elementales por filas en A hasta obtener una forma escalonada por filas A_e. Dado que las operaciones elementales por filas sobre una matriz no afectan a las relaciones de dependencia lineal entre sus vectores columna y observando que el conjunto de columnas pivote en A_e es linealmente independiente, se obtendrá una base del subespacio S_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_e,$$

donde

(1) $F_3 \to F_3 - F_1, F_4 \to F_4 - F_1$,

(2) $F_3 \to F_3 - 2F_2, F_4 \to F_4 - F_2$.

Así pues, $\text{rango}(A) = 2$ y $\mathcal{B}_{S_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de S_1.

Obsérvese que $\dim(S_1) = 2$.

Para determinar unas ecuaciones implícitas de S_1, en primer lugar se obtendrán unas ecuaciones paramétricas de S_1 utilizando los vectores de la base $\mathcal{B}_{S_1}$ y, a continuación, se eliminarán parámetros en estas ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in S_1 \Longleftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 0 & -1 & | & y \\ 1 & -1 & | & z \\ 1 & 0 & | & t \end{pmatrix}$$

Para establecer esta igualdad de rangos se procede realizando las mismas operaciones elementales por filas indicadas más arriba para la matriz A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 0 & -1 & | & y \\ 1 & -1 & | & z \\ 1 & 0 & | & t \end{pmatrix} \underset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 0 & -1 & | & y \\ 0 & -2 & | & z-x \\ 0 & -1 & | & t-x \end{pmatrix} \underset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & x \\ 0 & -1 & | & y \\ 0 & 0 & | & z-x-2y \\ 0 & 0 & | & t-x-y \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in S_1 \Longleftrightarrow \boxed{\left\{ \begin{array}{rl} -x-2y+z= & 0 \\ -x-y+t= & 0 \end{array} \right. \quad \text{Ecs. implícitas de } S_1}$$

4.2 Se verifica que $\begin{pmatrix} \lambda+2\mu \\ -\lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, $S_2 = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Puesto que los vectores generadores no son proporcionales, dichos vectores son linealmente independientes. Así pues, $\mathcal{B}_{S_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de S_2 y $\dim(S_2) = 2$.

4.3 El subespacio vectorial suma $S_1 + S_2$ está generado por la unión de un sistema de generadores de S_1 y un sistema de generadores de S_2, es decir,

$$S_1 + S_2 = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ahora se extrae el máximo conjunto de vectores linealmente entre los vectores generadores de $S_1 + S_2$. Para ello, se estudia el rango de la matriz cuyas columnas son

dichos vectores generadores:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

donde

(1) $F_3 \to F_3 - F_1, F_4 \to F_4 - F_1$,

(2) $F_3 \to F_3 - 2F_2, F_4 \to F_4 - F_2$.

Por tanto, rango$(B) = 4$ y, entonces, los cuatro vectores generadores de $S_1 + S_2$ son linealmente independientes y forman una base de $S_1 + S_2$. Luego $\dim(S_1 + S_2) = 4$.

4.4 Utilizando la fórmula de las dimensiones para subespacios vectoriales, $\dim(S_1 \cap S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 + S_2) = 2 + 2 - 4 = 0$. Se tiene entonces que $S_1 \cap S_2 = \{\bar{0}\}$ y, así, $S_1 + S_2$ es suma directa.

Por otra parte, teniendo en consideración que $S_1 + S_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ y $\dim(S_1 + S_2) = 4$, se verifica que $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^4$. En consecuencia, los subespacios S_1 y S_2 de $\mathbb{R}^4$ son complementarios ya que $S_1 \cap S_2 = \{\bar{0}\}$ y $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^4$.

5. (2 puntos) Sea $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2, con coeficientes reales.

5.1 Demostrar que $\mathcal{B} = \left\{1 + 2x + 2x^2, 2x - x^2, -1 - 2x\right\}$ es una base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

5.2 Obtener las coordenadas del polinomio $p(x) = 1 - 7x^2$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

Solución

5.1 En primer lugar, se comprueba que $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ escalares tales que

$$\lambda_1 \left(1 + 2x + 2x^2\right) + \lambda_2 \left(2x - x^2\right) + \lambda_3 \left(-1 - 2x\right) = \bar{0}.$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x resulta el siguiente sistema con incógnitas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 \qquad\quad - \lambda_3 &=& 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 &=& 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 \qquad\quad &=& 0 \end{array} \right.$$

Aplicando el método de eliminación de Gauss a la matriz del sistema, se tiene

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \end{array}\right)$$

donde

(1) $F_2 \to F_2 - F_1, F_3 \to F_3 - 2F_1$,

(2) $F_3 \to F_3 + F_2$.

Como el sistema es homogéneo y el rango de C coincide con el número de incógnitas, por el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible determinado. Esto implica que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Por tanto, $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente. Además, como el número de elementos de $\mathcal{B}$ coincide con la dimensión de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, el conjunto $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

5.2 Las coordenadas del polinomio $p(x)$ respecto de la base $\mathcal{B}$ son los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que

$$\lambda_1 \left(1 + 2x + 2x^2\right) + \lambda_2 \left(2x - x^2\right) + \lambda_3 \left(-1 - 2x\right) = p(x).$$

El siguiente sistema, obtenido al igualar los coeficientes de las mismas potencias de x, se resuelve mediante el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} \lambda_1 \qquad\quad - \lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 \qquad\quad = -7 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & -1 & 0 & | & -7 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & -1 & 2 & | & -9 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & | & -10 \end{pmatrix} \underset{(3)}{\sim}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5 \end{pmatrix} \underset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -4 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5 \end{pmatrix}$$

donde

(1) $F_2 \to F_2 - F_1, F_3 \to F_3 - 2F_1$,

(2) $F_3 \to F_3 + F_2$,

(3) $F_3 \to \frac{1}{2} F_3$,

(4) $F_1 \to F_1 + F_3$.

A la vista de la forma reducida de la matriz ampliada del sistema, se tiene que $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = -5$. Luego el vector de coordenadas del polinomio $p(x)$ respecto de la base $\mathcal{B}$ es $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.